5. İÇ ÇARPIM UZAYLARI

5.1. $\mathbb{R}^n$ Uzayında İç Çarpım:

$X, Y \in \mathbb{R}^n$ olsun. X ve Y vektörlerini $n\times 1$ tipindeki kolon matrisler olarak düşünebiliriz. Böylece X^T ve Y matrislerinin matris çarpımları anlamlıdır ve bu çarpım 1×1 tipinde bir matris veya bir reel sayı belirtir. X^TY çarpımına X ve Y nin İç Çarpımı adı verilir. Bu iç çarpım matris formunda

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_1 \quad \text{için}$$

$$X^TY = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1y_1 + \dots + x_ny_n \end{bmatrix}$$

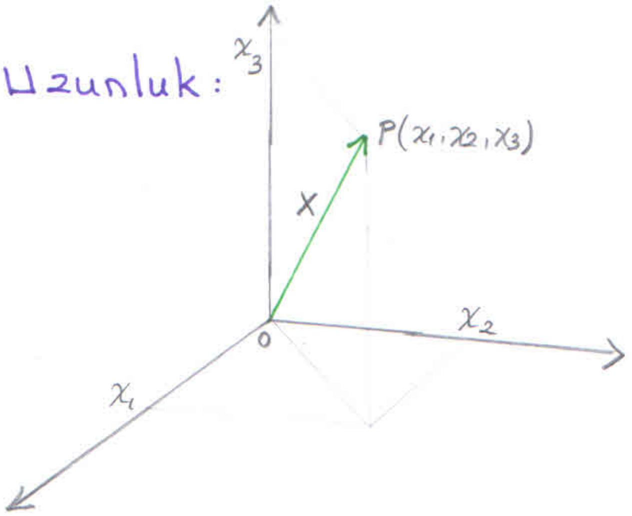
veya vektör formunda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

şeklindedir.

Yukarıdaki tanım, $\mathbb{R}^3$ deki bildiğimiz uzunluk, açı ve uzaklık kavramlarını ifade etmemize yardımcı olacaktır.

1- Uzunluk:



$\vec{OP} = X$ vektörünün boyunun

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

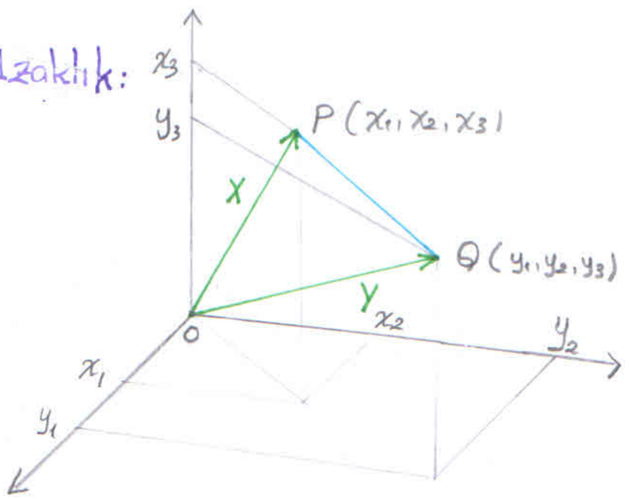
$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$= \sqrt{x_1 . x_1 + x_2 . x_2 + x_3 . x_3}$$

$$= \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

şeklindedir.

2- Uzaklık:



$\vec{OP} = X$ ve $\vec{OQ} = Y$ olmak üzere P ve Q arasındaki uzaklık

$$\|PQ\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

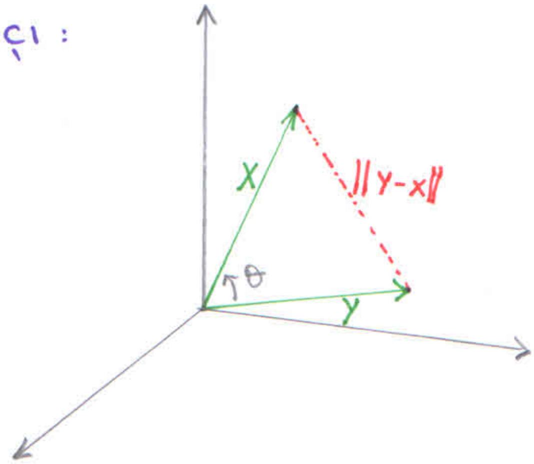
$$\|PQ\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}$$

$$= \sqrt{(y_1-x_1).(y_1-x_1) + (y_2-x_2).(y_2-x_2) + (y_3-x_3).(y_3-x_3)}$$

$$= \sqrt{\langle Y-X,\, Y-X \rangle}$$

şeklindedir.

3. Açı :



Yandaki üçgende cosinüs teoremi uygularsa

$$\|Y-X\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\|X\|\,\|Y\|\cos\theta$$

dır. Böylece

$$\theta = \arccos \frac{\langle X, Y \rangle}{\sqrt{\langle X, X \rangle}\sqrt{\langle Y, Y \rangle}}$$

şeklindedir.

__Tanım:__ V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomlar ile tanımlanan bir

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

reel değerli fonksiyonuna denir ve değeri $X, Y \in V$ olmak üzere $\langle X, Y \rangle$ ile gösterilir:

(i) <u>Simetri aksiyomu:</u>

$$<x,y> = <y,x> \quad , \text{ her } x,y \in V$$

(ii) <u>Bilineerlik aksiyomu:</u>

- $<\lambda x, y> = \lambda <x,y> = <x, \lambda y>$, her $\lambda \in \mathbb{R}$, her $x,y \in V$
- $<x_1 + x_2, y> = <x_1, y> + <x_2, y>$, her $x_1, x_2, y \in V$
- $<x, y_1 + y_2> = <x, y_1> + <x, y_2>$, her $x, y_1, y_2 \in V$

(iii) <u>Pozitif tanımlılık aksiyomu:</u>

- $<x,x> \geq 0$, her $x \in V$
- $<x,x> = 0 \iff x = 0$, her $x \in V$

Bu iç çarpım fonksiyonu ile birlikte V vektör uzayına bir İÇ ÇARPIM UZAYI denir.

<u>$\mathbb{R}^n$ Vektör Uzayı</u> Bir $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$<x,y> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlansın. $<,>$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı için <u>Standart İç Çarpım</u> adını alır.

$\mathbb{R}^{m\times n}$ Vektör Uzayı Bir $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m_n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

her $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^m_n$ için

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

şeklinde tanımlansın. $\langle\, ,\, \rangle$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur.

$C[a,b]$ Vektör Uzayı Bir $\langle\, ,\, \rangle : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonu her $f, g \in C[a,b]$ için

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

şeklinde tanımlansın. $\langle\, ,\, \rangle$ fonksiyonu iç çarpım fonksiyonudur.
Buna integral iç çarpımı adı verilir.

P_n Vektör Uzayı Bir $\langle\, ,\, \rangle : P_n \times P_n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

her $p, q \in P_n$ için $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ler ayrık reel sayılar olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, q(x_i)$$

şeklinde tanımlansın. $\langle\, ,\, \rangle$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur.

5.2. Ortogonallik

Tanım: Bir V vektör uzayı üzerinde bir $<,>$ iç çarpım fonksiyonu tanımlı olsun.

(i) $x \in V$ vektörünün uzunluğu (veya normu)

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $\|x\| = 1$ ise, o zaman x vektörüne Birim Vektör adı verilir.

(ii) $x, y \in V$ için eğer $<x,y> = 0$ ise, o zaman x ve y vektörü Ortogonaldir.

(iii) $S \subset V$ herhangi bir alt uzay olmak üzere

$$S^{\perp} = \{ x \in V \mid <x,y> = 0, \text{ her } y \in S \}$$

kümesine S nin Ortogonal Komplemanı denir.

Örnek: $C[-\pi,\pi]$ sürekli fonksiyonların uzayında $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun normunu ve $g(x) = 1$ ile ortogonal olduğunu gösterelim

$$\|\sin x\|^2 = \langle \sin x, \sin x \rangle$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2x)\,dx = \pi$$

olup $\|\sin x\| = \sqrt{\pi}$ bulunur. Diğer taraftan,

$$\langle \sin x, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

olup $\sin x$ ve 1 fonksiyonları ortogonaldir.

<u>Teorem:</u> Bir V vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu $\langle \, , \, \rangle$ olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

(i) Her $x \in V$ için

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{ve} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 .$$

(ii) Her $x \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| .$$

(iii) x ve y, V de ortogonal vektörler olmak üzere

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

(iv) Her $x, y \in V$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

(v) Her $x, y \in V$ için

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(vi) $S \subset V$ alt uzayı için $S^{\perp}$ kümesi V nin bir alt uzayıdır.

(vii) $S \subset V$ alt uzay ve $S^{\perp}$ kümesi S nin bir ortogonal komplemon uzayı olmak üzere

$$\text{boy } V = \text{boy } S + \text{boy } S^{\perp}$$

dır.

Örnek: $S = \{(1,-1,1), (1,1,0), (2,0,1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart iç çarpım fonksiyonuna göre $S^{\perp}$ ortogonal komplemon kümesini bulalım.

$X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün $S^{\perp}$ kümesinde olması için S deki herbir vektör ile ortogonal olmalıdır. Öyleyse, x_1, x_2 ve x_3

$$\langle X, (1,-1,1) \rangle = x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\langle X, (1,1,0) \rangle = x_1 + x_2 = 0$$

$$\langle X, (2,0,1) \rangle = 2x_1 + x_3 = 0$$

eşitliklerini sağlamalıdır. Buradan lineer homojen denklem sisteminin çözümü

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_3}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R}$$

$\varepsilon_1 : S_2 \to -S_1 + S_2$

$\varepsilon_2 : S_3 \to -2S_1 + S_2$

$\varepsilon_3 : S_3 \to -S_2 + S_3$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_2 - x_3 = 0$$

sisteminin çözümü ile aynıdır. O halde,

$x_3 = 2t$ dersek $x_2 = t$, $x_1 = -t$ olur.

Sonuç olarak,

$$S^{\perp} = \{ t(-1,1,2) : t \in \mathbb{R} \} = \text{Span}(-1,1,2)$$

elde edilir.

5.3. Ortogonal ve Ortonormal Bazlar

Tanım: V bir iç çarpım uzayı ve sıfırdan farklı V deki n-tane vektör $v_1, v_2, \dots, v_n$ olsun. Eğer $i \neq j$ için $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere

$$< v_i, v_j > = 0$$

oluyorsa, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesine $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerin Ortogonal Kümesi denir.

Teorem: V bir iç çarpım uzayı ve sıfırdan farklı V deki n-tane vektör $v_1, v_2, \dots, v_n$ olsun. Eğer $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortogonal bir küme ise, o zaman $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineer bağımsızdır.

Tanım: V bir iç çarpım uzayı ve sıfırdan farklı V deki n-tane vektörden oluşan ortogonal küme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için v_i vektörleri birim iseler, yani $\forall i = 1, \dots, n$ için $\|v_i\| = 1$, o zaman $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesine Ortonormal Küme denir.

Not: Sıfırdan farklı herhangi bir vektör birim olacak şekilde düzenlenebilir. Bu vektöre Birimleştirilmiş Vektör adı verilir.

$$0 \neq v \in V \text{ için } u = \frac{1}{\|v\|} v \text{ birim vektördür.}$$

Örnek: $\mathbb{R}^3$ deki standart iç çarpım fonksiyonu ile

$S_1 = \{(1,1,1), (-2,1,1), (0,-1,1)\}$ ortogonal kümedir

$S_2 = \{(3, 1/2, -1), (-1, 2, -2)\}$ ortogonal kümedir

$S_3 = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ ortonormal kümedir.

$S_4 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ortonormal kümedir.

Örnek: $C[-\pi,\pi]$ uzayı üzerinde tanımlı olan integral iç çarpım fonksiyonunu kullanarak

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx \quad \text{ve} \quad 1, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin mx, \ldots$$

fonksiyonlarını içeren kümenin ortogonal olduğunu inceleyelim:

$m \neq n$ tamsayıları için

- $$\langle \cos nx, \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)}{n+m} x + \frac{\sin(n-m)}{n-m} x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

- $$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin(n+m)}{n+m} x - \frac{\sin(n-m)}{n-m} x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

- $\langle \sin mx, \cos nx \rangle = 0$ dır.

NOT: Üzerinde bir iç çarpım fonksiyonunun tanımlı olduğu bir V vektör uzayında bir $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ kümesi ortonormal ise, o zaman

$$S = Span(u_1, u_2, \ldots, u_n) = Span(B)$$

alt uzayı için B kümesi bir baz teşkil eder.

Teorem: Bir V iç çarpım uzayında $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortonormal baz olsun. Eğer $v \in V$ için

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

ise, o zaman

$$c_i = \langle v, u_i \rangle \quad \text{dır.}$$

Teorem: Bir V iç çarpım uzayında $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortonormal baz olsun. Eğer $v, w \in V$ için

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad \text{ve} \quad w = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$$

iseler, o zaman

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{dır.}$$

Sonuç (Parseval'in Formülü):

Bir V iç çarpım uzayında $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal baz olsun. Eğer $v \in V$ için

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

ise, o zaman

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \text{ dir.}$$

Örnek: $C[-\pi, \pi]$ uzayında $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ iç çarpım fonksiyonuna göre $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 2x\right\}$ ortonormal kümesini ele alalım. İntegral kurallarını kullanmadan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx \quad \text{integralini hesaplayalım.}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x \quad \text{yazılır.}$$

Ayrıca, integral iç çarpım fonksiyonuna göre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \pi \langle \sin^2 x, \sin^2 x \rangle = \pi \|\sin^2 x\|^2$$

olmak üzere

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = \pi \left\| \sin^2 x \right\|^2 = \pi \left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} \quad \text{bulunur.}$$

Teorem: V bir iç çarpım uzayı ve $S \subset V$ alt uzay olsun. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ kümesi S alt uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere eğer

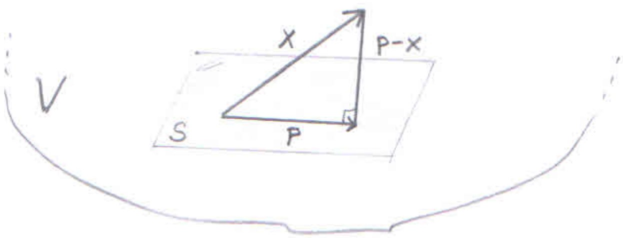
$$P = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

olacak şekilde yazılıyor ise, o zaman $x \in V$ için $i = 1, 2, \ldots, n$-e karşılık $c_i = \langle x, u_i \rangle$ olduğunda

$$p - x \in S^{\perp}$$

dır.

Sonuç: Yukarıdaki teoreme göre S alt uzayının elemanları içerisinde x vektörüne en yakın olan vektör p dir.



Fonksiyonların Yaklaşımı: Sürekli bir fonksiyona bazı özel yaklaşım kümelerindeki fonksiyonlarla yaklaşmak bir çok problemde önem arz etmektedir. Çoğunlukla n veya daha az dereceli bir polinom ile yaklaşım yapılır. En iyi yaklaşımı bulmak için Yukarıdaki teoremi kullanacağız.

Örnek: $[0,1]$ aralığında e^x fonksiyonu için en iyi yaklaşımı veren lineer fonksiyonu bulalım.

$C[0,1]$ vektör uzayındaki tüm lineer fonksiyonları içeren alt uzayı S ile gösterelim.

$$S = \text{Span}\{1, x\}$$

dır, fakat açık bir şekilde 1 ve x ortogonal değildir. Şimdi 1 ile ortogonal olan $x-a$ formuna sahip fonksiyonu araştıralım.

$$\langle 1, x-a \rangle = \int_0^1 (x-a)\,dx = \frac{1}{2} - a$$

olup $a = \frac{1}{2}$ dır. Öyleyse

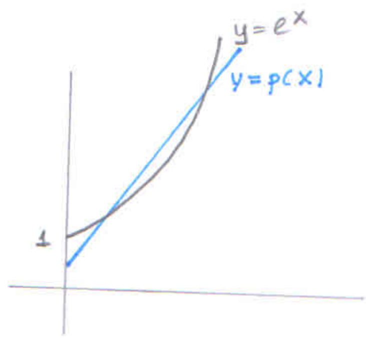
$$\left\| x - \frac{1}{2} \right\| = 1/\sqrt{12}$$

dır. Buradan S için bir ortonormal baz oluşturacak fonksiyonlar

$$u_1(x) = 1 \quad \text{ve} \quad u_2(x) = \sqrt{12}\,(x - 1/2)$$

elde edilir. Teoreme göre

$$c_1 = \int_0^1 u_1(x)\, e^x\, dx = e - 1$$



$$c_2 = \int_0^1 u_2(x)\, e^x\, dx = \sqrt{3}\,(3-e)$$

bulunur. Sonuç olarak e^x fonksiyonunun en iyi yaklaşımını veren fonksiyon $P(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \\ &= (4e-10) + 6(3-e)\,x \end{aligned}$$

dır.

Trigonometrik Polinomlar ile Yaklaşım: n-den daha az dereceye sahip trigonometrik bir polinom

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

formuna sahip bir fonksiyondur.

Hali hazırda $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx \right\}$ kümesinin $C[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı olan iç çarpım fonksiyonuna göre ortogonal olduğu gösterildi. Bir adım ileriye giderek bu ortogonal kümenin her bir elemanının boyunun 1 olduğu gösterilebilir. Nihayetinde söz konusu küme ortonormaldir. Böylece bir önceki teoremi sürekli ve 2π periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşımı n veya n-den daha az dereceli bir trigonometrik polinom ile bulmak için kullanabiliriz. Öyleyse katsayılar

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \langle f, \cos kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$b_k = \langle f, \sin kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

şeklindedir. Bu katsayılar f-ye en iyi yaklaşımı belirler. a_k ve b_k katsayıları iyi bilinen Fourier Katsayıları olarak ortaya çıkıyor.

KAYNAKLAR

1-Schaum's Outline of Lİnear Algebra, Seymour Lipschutz and Marc Lipson.
2-Doğrusal Cebir, Cemal Koç ve Songül Esin, Matematik Vakfı 1995.
3-Lineer Cebir Prof. Dr. Süleyman Çiftçi, Dora Yayınları 2015.
4-Linear Algebra with Applications, Steven J. Leon, Global Edition.